2022 年普通高等学校招生全国统一考试（新高考全国Ⅰ卷）

数学

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\{x\mid\sqrt{x}<4\}$， $N=\{x\mid 3x\geq 1\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A. $\left\{x\middle|0\leq x<2\right\}$　　B. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leq x<2\right\}$　　C. $\left\{x\middle|3\leq x<16\right\}$　　D. $\left\{x\middle|\frac{1}{3}\leq x<16\right\}$

2．若 $\mathrm{i}(1-z)=1$，则 $z+\overline{z}=$（　　）

A．-2　　B．-1　　C．1　　D．2

3．在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上，$BD=2DA$．记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m},\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$（　　）

A．$3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$　　B．$-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$　　C．$3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$　　D．$2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$

4．南水北调工程缓解了北方一些地区水资源短缺问题，其中一部分水蓄入某水库.已知该水库水位为海拔 $148.5\mathrm{m}$ 时，相应水面的面积为 $140.0\mathrm{km}^2$；水位为海拔 $157.5\mathrm{m}$ 时，相应水面的面积为 $180.0\mathrm{km}^2$，将该水库在这两个水位间的形状看作一个棱台，则该水库水位从海拔

148.5m 上升到 157.5m 时，增加的水量约为（$\sqrt{7}\approx 2.65$）（　　）

A. $1.0\times 10^{9}\text{m}^{3}$　　B. $1.2\times 10^{9}\text{m}^{3}$　　C. $1.4\times 10^{9}\text{m}^{3}$　　D. $1.6\times 10^{9}\text{m}^{3}$

5. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，则这 2 个数互质的概率为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 记函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+b(\omega>0)$ 的最小正周期为 T. 若 $\frac{2\pi}{3}<T<\pi$，且 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{3\pi}{2},2\right)$ 中心对称，则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=$（　　）

A. 1　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 3

7. 设 $a=0.1\text{e}^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则（　　）

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$　　C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

8. 已知正四棱锥的侧棱长为 l，其各顶点都在同一球面上.若该球的体积为 36π，且 $3\le l\le 3\sqrt{3}$，则该正四棱锥体积的取值范围是（　　）

A. $\left[18,\frac{81}{4}\right]$　　B. $\left[\frac{27}{4},\frac{81}{4}\right]$　　C. $\left[\frac{27}{4},\frac{64}{3}\right]$　　D. $[18,27]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则（　　）

A. 直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$　　B. 直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$

C. 直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$　　D. 直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则（　　）

A. $f(x)$ 有两个极值点　　B. $f(x)$ 有三个零点

C. 点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心　　D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线

11. 已知 O 为坐标原点，点 $A(1,1)$ 在抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 上，过点 $B(0,-1)$ 的直线交 C 于 P，Q 两点，则（　　）

A. C 的准线为 $y=-1$　　B. 直线 AB 与 C 相切

C. $|OP|\cdot|OQ|>|OA|^2$　　D. $|BP|\cdot|BQ|>|BA|^2$

12.已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$.若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则（　　）

A．$f(0)=0$　　B．$g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　C．$f(-1)=f(4)$　　D．$g(-1)=g(2)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 x^2y^6 的系数为________________（用数字作答）．

14．写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 都相切的一条直线的方程________________．

15．若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________________．

16．已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$C$ 的上顶点为 A，两个焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\frac{1}{2}$．过 F_1 且垂直于 AF_2 的直线与 C 交于 D，E 两点，$|DE|=6$，则 $\triangle ADE$ 的周长是________________．

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_1=1,\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<2$．

18．（12 分）

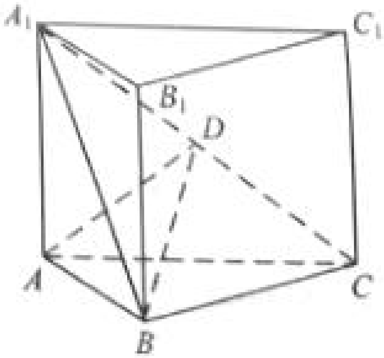
记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}$．

（1）若 $C=\frac{2\pi}{3}$，求 B；

（2）求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值．

19．（12 分）

如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4，$\triangle A_1BC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$．



（1）求 A 到平面 A_1BC 的距离；

（2）设 D 为 A_1C 的中点，$AA_1=AB$，平面 $A_1BC\perp$ 平面 ABB_1A_1，求二面角 $A-BD-C$ 的正弦值．

20．（12 分）

一医疗团队为研究某地的一种地方性疾病与当地居民的卫生习惯(卫生习惯分为良好和不够良好两类）的关系，在已患该疾病的病例中随机调查了 100 例（称为病例组），同时在未患该疾病的人群中随机调查了 100 人（称为对照组），得到如下数据：

	不够良好	良好
病例组	40	60
对照组	10	90

（1）能否有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异？

（2）从该地的人群中任选一人，A 表示事件“选到的人卫生习惯不够良好”，B 表示事件“选到的人患有该疾病”，$\dfrac{P(B\mid A)}{P(\bar{B}\mid A)}$ 与 $\dfrac{P(B\mid \bar{A})}{P(\bar{B}\mid \bar{A})}$ 的比值是卫生习惯不够良好对患该疾病风险程度的一项度量指标，记该指标为 R．

（ⅰ）证明：$R=\dfrac{P(A\mid B)}{P(\bar{A}\mid B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A}\mid \bar{B})}{P(A\mid \bar{B})}$；

（ⅱ）利用该调查数据，给出 $P(A\mid B),P(A\mid \bar{B})$ 的估计值，并利用（ⅰ）的结果给出 R 的估计值．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P\left(K^2\ge k\right)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

21．（12 分）

已知点 $A(2,1)$ 在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$ 上，直线 l 交 C 于 P,Q 两点，直线 AP,AQ 的斜率之和为 0.

（1）求 l 的斜率；

（2）若 $\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$，求 $\triangle PAQ$ 的面积.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

（1）求 a；

（2）证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

绝密☆启用前　试卷类型：A

2022 年普通高等学校招生全国统一考试（新高考全国Ⅰ卷）

数学

参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.D　2. D　3. B　4. C　5. D　6. A　7. C　8. C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. ABD　10. AC　11. BCD　12. BC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. -28

14. $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$ 或 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$ 或 $x=-1$

15. $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$

16. 13

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（1）$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

（2）$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

$\therefore \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$

18.（1）$\frac{\pi}{6}$；

（2）$4\sqrt{2}-5$．

19.（1）$\sqrt{2}$

（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}$

20. （1）由已知 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200(40\times90-60\times10)^2}{50\times150\times100\times100}=24$，

又 $P(K^2\geq6.635)$=0.01， $24>6.635$，

所以有 99%的把握认为患该疾病群体与未患该疾病群体的卫生习惯有差异.

（2）（i）因为 $R=\frac{P(B|A)}{P(\bar{B}|A)}\cdot\frac{P(\bar{B}|\bar{A})}{P(B|\bar{A})}=\frac{P(AB)}{P(A)}\cdot\frac{P(A)}{P(A\bar{B})}\cdot\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}\cdot\frac{P(\bar{A})}{P(\bar{A}B)}$，

所以 $R=\frac{P(AB)}{P(B)}\cdot\frac{P(B)}{P(\bar{A}B)}\cdot\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})}\cdot\frac{P(\bar{B})}{P(A\bar{B})}$

所以 $R=\frac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(A|\bar{B})}$；

(ii) $R=6$；

21.（1）-1；

（2）$\frac{16\sqrt{2}}{9}$．

22.（1）$a=1$

（2）由（1）可得 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$ 和 $g(x)=x-\ln x$ 的最小值为 $1-\ln 1=1-\ln\frac{1}{1}=1$.

当 $b>1$ 时，考虑 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解的个数、$x-\ln x=b$ 的解的个数.

设 $S(x)=\mathrm{e}^x-x-b$，$S'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

当 $x<0$ 时，$S'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$S'(x)>0$，

故 $S(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数，在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $S(x)_{\min}=S(0)=1-b<0$，

而 $S(-b)=\mathrm{e}^{-b}>0$，$S(b)=\mathrm{e}^b-2b$，

设 $u(b)=\mathrm{e}^b-2b$，其中 $b>1$，则 $u'(b)=\mathrm{e}^b-2>0$，

故 $u(b)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，故 $u(b)>u(1)=\mathrm{e}-2>0$，

故 $S(b)>0$，故 $S(x)=\mathrm{e}^x-x-b$ 有两个不同的零点，即 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解的个数为 2.

设 $T(x)=x-\ln x-b$，$T'(x)=\frac{x-1}{x}$，

当 $0<x<1$ 时，$T¢(x)<0$，当 $x>1$ 时，$T'(x)>0$，

故 $T(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，在 $(1,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $T(x)_{\min}=T(1)=1-b<0$，

而 $T(\mathrm{e}^{-b})=\mathrm{e}^{-b}>0$，$T(\mathrm{e}^b)=\mathrm{e}^b-2b>0$，

$T(x)=x-\ln x-b$ 有两个不同的零点即 $x-\ln x=b$ 的解的个数为 2.

当 $b=1$，由（1）讨论可得 $x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^x-x=b$ 仅有一个零点，

当 $b<1$ 时，由（1）讨论可得 $x-\ln x=b$、$\mathrm{e}^x-x=b$ 均无零点，

故若存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(x)$、$y=g(x)$ 有三个不同的交点，

则 $b>1$.

设 $h(x)=\mathrm{e}^x+\ln x-2x$，其中 $x>0$，故 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}-2$，

设 $s(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$x>0$，则 $s'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，

故 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，故 $s(x)>s(0)=0$ 即 $\mathrm{e}^x>x+1$，

所以 $h'(x)>x+\frac{1}{x}-1\geq 2-1>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

而 $h(1)=\mathrm{e}-2>0$， $h(\frac{1}{\mathrm{e}^3})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}^3}}-3-\frac{2}{\mathrm{e}^3}<\mathrm{e}-3-\frac{2}{\mathrm{e}^3}<0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点 x_0， $\frac{1}{\mathrm{e}^3}<x_0<1$ 且：

当 $0<x<x_0$ 时， $h(x)<0$ 即 $\mathrm{e}^x-x<x-\ln x$ 即 $f(x)<g(x)$，

当 $x>x_0$ 时， $h(x)>0$ 即 $\mathrm{e}^x-x>x-\ln x$ 即 $f(x)>g(x)$，

因此若存在直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(x)$、 $y=g(x)$ 有三个不同的交点，

故 $b=f(x_0)=g(x_0)>1$，

此时 $\mathrm{e}^x-x=b$ 有两个不同的零点 $x_1,x_0(x_1<0<x_0)$，

此时 $x-\ln x=b$ 有两个不同的零点 $x_0,x_4(0<x_0<1<x_4)$，

故 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$， $\mathrm{e}^{x_0}-x_0=b$， $x_4-\ln x_4-b=0$， $x_0-\ln x_0-b=0$

所以 $x_4-b=\ln x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}=x_4$ 即 $\mathrm{e}^{x_4-b}-(x_4-b)-b=0$，

故 x_4-b 为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解，同理 x_0-b 也为方程 $\mathrm{e}^x-x=b$ 的解

又 $\mathrm{e}^{x_1}-x_1=b$ 可化为 $\mathrm{e}^{x_1}=x_1+b$ 即 $x_1-\ln(x_1+b)=0$ 即 $(x_1+b)-\ln(x_1+b)-b=0$，

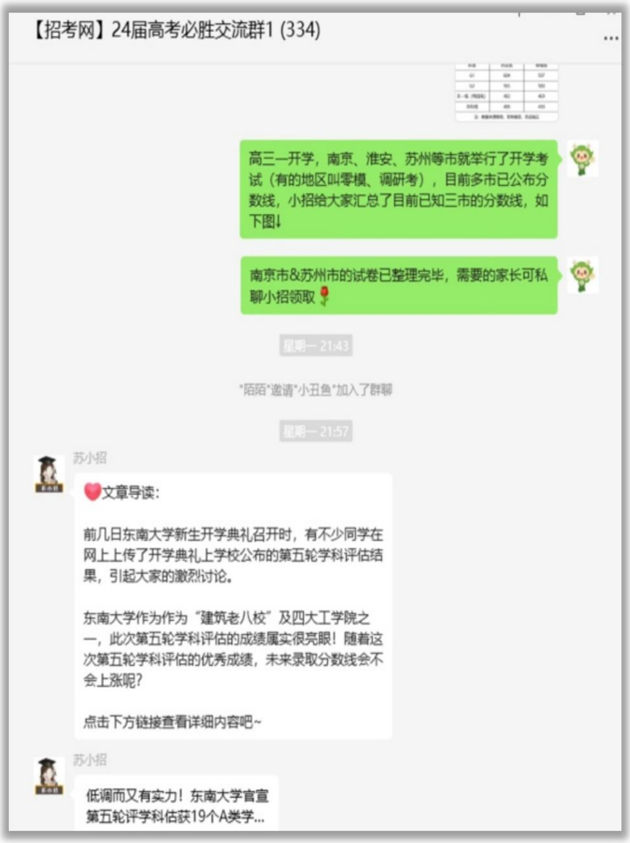
故 x_1+b 为方程 $x-\ln x=b$ 的解，同理 x_0+b 也为方程 $x-\ln x=b$ 的解，

所以 $\{x_1,x_0\}=\{x_0-b,x_4-b\}$，而 $b>1$，

故 $\begin{cases}x_0=x_4-b\\x_1=x_0-b\end{cases}$ 即 $x_1+x_4=2x_0$.

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，欢迎加入江苏招生考试网建立的【江苏高考交流群】，群内会分享一手高考资讯、往年真题、学习资料、综评、强基、志愿填报等干货及答疑，群内还有不定时福利发放哦，快加入吧！

（招考网 qq 群资料）



（招考网微信群分享）

↓↓扫描下方二维码，添加苏小招微信，邀请您加入高考交流群，助力孩子高考！

另外，江苏招生考试网联合志愿通策划了多册升学资料，均可免费分享给需要的家长，欢迎咨询获取。