

2023 年全国新高考 I 卷

适用范围: 湖北、山东、广东、江苏、河北、湖南、福建、浙江

一、选择题: 本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $N = \{x | x^2 - x - 6 \geq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()
A. $\{-2, -1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-2\}$ D. $\{2\}$
2. 已知 $z = \frac{1-i}{2+2i}$, 则 $z - \bar{z} =$ ()
A. $-i$ B. i C. 0 D. 1
3. 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1)$. 若 $(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$, 则 ()
A. $\lambda + \mu = 1$ B. $\lambda + \mu = -1$ C. $\lambda\mu = 1$ D. $\lambda\mu = -1$
4. 设函数 $f(x) = 2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递减, 则 a 的取值范围是 ()
A. $(-\infty, -2]$ B. $[-2, 0)$ C. $(0, 2]$ D. $[2, +\infty)$
5. 设椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$, $C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的离心率分别为 e_1, e_2 . 若 $e_2 = \sqrt{3}e_1$, 则 $a =$ ()
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$
6. 过点 $(0, -2)$ 与圆 $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ 相切的两条直线的夹角为 α , 则 $\sin \alpha =$ ()
A. 1 B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$
7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 设甲: $\{a_n\}$ 为等差数列; 乙: $\{\frac{S_n}{n}\}$ 为等差数列, 则 ()
A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件
B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件
C. 甲是乙的充要条件
D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件
8. 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$ ()
A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_6 , 其中 x_1 是最小值, x_6 是最大值, 则 ()

- A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的平均数
- B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 x_1, x_2, \dots, x_6 的中位数
- C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 x_1, x_2, \dots, x_6 的标准差
- D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 x_1, x_2, \dots, x_6 的极差

10. 噪声污染问题越来越受到重视, 用声压级来度量声音的强弱, 定义声压级 $L_p = 20 \times \lg \frac{p}{p_0}$, 其中常数 $p_0 (p_0 > 0)$ 是听觉下限阈值, p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/ m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1, p_2, p_3 , 则 ()

- A. $p_1 \geq p_2$
- B. $p_2 > 10p_3$
- C. $p_3 = 100p_0$
- D. $p_1 \leq 100p_2$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 则 ()

- A. $f(0) = 0$
- B. $f(1) = 0$
- C. $f(x)$ 是偶函数
- D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12. 下列物体中, 能够被整体放入核长为 1(单位: m) 的正方体容器 (容器壁厚度忽略不计) 内的有 ()

- A. 直径为 0.99 m 的球体
- B. 所有棱长均为 1.4 m 的四面体
- C. 底面直径为 0.01 m, 高为 1.8 m 的圆柱体
- D. 底面直径为 1.2 m, 高为 0.01 m 的圆柱体

三、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

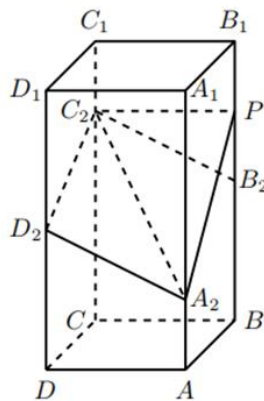
13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课, 学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课, 并且每类选修课至少选修 1 门, 则不同的选课方案共有 _____ 种 (用数字作答).

14. 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $A_1B_1 = 1$, $AA_1 = \sqrt{2}$, 则该棱台的体积为_____.
15. 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 1 (\omega > 0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是_____.
16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 . 点 A 在 C 上. 点 B 在 y 轴上, $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$, $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$, 则 C 的离心率为_____.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C$, $2\sin(A - C) = \sin B$.
- (1) 求 $\sin A$;
- (2) 设 $AB = 5$, 求 AB 边上的高.

18. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = 4$. 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, $AA_2 = 1$, $BB_2 = DD_2 = 2$, $CC_2 = 3$.
- (1) 证明: $B_2C_2 \parallel A_2D_2$;
- (2) 点 P 在棱 BB_1 上, 当二面角 $P - A_2C_2 - D_2$ 为 150° 时, 求 B_2P .



19. 已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.
- (1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$, 令 $b_n = \frac{n^2 + n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

21. 甲乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮的命中率均为 0.6, 乙每次投篮的命中率均为 0.8, 由抽签决定第一次投篮的人选, 第一次投篮的人是甲, 乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则 $E(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n q_i$, 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y , 求 $E(Y)$.

22. 在直角坐标系 xOy 中, 点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $(0, \frac{1}{2})$ 的距离, 记动点 P 的轨迹为 W .

(1) 求 W 的方程;

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上, 证明: 矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

2023年新高考数学 I 卷试题参考答案

一、单选题

1、C 2、A 3、D 4、D

5、A 6、B 7、C 8、B

二、多选题

9、BD 10、ACD 11、ABC 12、ABD

三、填空题

13、64 14、 $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ 15、 $2 \leq \omega < 3$ 16、 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

四、解答题

17. (10分)

已知在 $\triangle ABC$ 中， $A+B=3C$ ， $2\sin(A-C)=\sin B$ 。

(1) 求 $\sin A$ ；

(2) 设 $AB=5$ ，求 AB 边上的高。

解析

(1). 由题意得

$$A+B=3C \Rightarrow A+B+C=4C=\pi \Rightarrow C=\frac{\pi}{4}$$

所以

$$2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3}{4}\pi-A\right) \Rightarrow \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

(2). 因为 $\sin B=\sin(A+C)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ ，所以由正弦定理可知

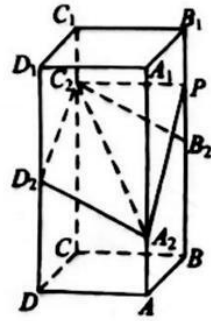
$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow b=2\sqrt{10}$$

所以由面积法可知

$$S=\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A=\frac{1}{2} \cdot c \cdot h \Rightarrow h=b \sin A=6$$

18. (12分)

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=2$ ， $AA_1=4$ 。点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上， $AA_2=1$ ， $BB_2=DD_2=2$ ， $CC_2=3$ 。



(1) 证明： $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ ；

(2) 点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° 时，求 B_2P 。

解析

以 C 为原点， CD 为 x 轴， CB 为 y 轴， CC_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，所以

$B_2 : (0, 2, 2)$ ， $C_2 : (0, 0, 3)$ ， $A_2 : (2, 2, 1)$ ， $D_2 : (2, 0, 2)$

(1). 因为 $\overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1)$ ， $\overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1)$

所以 $\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{A_2D_2}$ ，所以 $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ 。

(2). 设 $P : (0, 2, t)$ ，其中 $2 \leq t \leq 4$

所以 $\overrightarrow{PA_2} = (2, 0, 1-t)$ ， $\overrightarrow{PC_2} = (0, -2, 3-t)$ ， $\overrightarrow{D_2C_2} = (-2, 0, 1)$ ， $\overrightarrow{D_2A_2} = (0, 2, -1)$ 。

所以面 PA_2C_2 法向量 $\vec{n}_1 = (t-1, 3-t, 2)$ ，面 $D_2A_2C_2$ 法向量 $\vec{n}_2 = (1, 1, 2)$

因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° ，所以

$$\left| \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2t^2 - 8t + 14}} \right| = |\cos 150^\circ| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = 1(\text{舍}) \parallel t = 3$$

所以 $B_2P = 1$

19. (12分)

已知函数 $f(x) = a(e^x + a) - x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

解析

(1). 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = a \cdot e^x - 1$, 故

① $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq -1 < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减

② $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_0 = -\ln a$, 故

	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, \infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	极小值	\nearrow

(2). $f_{\min} = f(-\ln a) = a^2 + 1 + \ln a$

令 $g(a) = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$, 求导得 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a}$

令导数为 0 解得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

	$(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
$g'(a)$	-	0	+
$g(a)$	\searrow	极小值	\nearrow

所以 $g_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln 2}{2} > 0$

故 $g(a) > 0$, 所以 $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$

20. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 且 $d > 1$, 令 $b_n = \frac{n^2+n}{a_n}$, 记 S_n, T_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 若 $3a_2 = 3a_1 + a_3, S_3 + T_3 = 21$, 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且 $S_{99} - T_{99} = 99$, 求 d .

(1). 由题意得 $3a_2 = 3a_1 + a_3, 2a_2 = a_1 + a_3$, 解得

$$a_2 = 2a_1$$

又因为 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d$, 所以 $b_n = \frac{n^2+n}{a_1 + (n-1)d}$

因为 $S_3 + T_3 = 21$, 所以

$$6a_1 + \frac{9}{a_1} = 21 \Rightarrow a_1 = 3 \parallel a_1 = \frac{1}{2} (\text{舍})$$

所以 $a_n = 3n$

(2). 设 $a_n = d_a \cdot n + p_a, b_n = d_b \cdot n + p_b$, 其中 $d_a > 1$

记 $c_n = a_n - b_n = (d_a - d_b)n + p_a - p_b$, 故 $\{c_n\}$ 也为等差数列, 所以

$$S_{99} - T_{99} = c_1 + c_2 + \dots + c_{99} = \frac{(c_1 + c_{99}) \cdot 99}{2} = 99 \cdot c_{50} = 99$$

所以 $c_{50} = 1$

因为 $b_n = \frac{n^2+n}{a_n}$, 所以代入可得

$$d_b n + p_b = \frac{n^2+n}{d_a n + p_a} \Rightarrow n^2 + n = d_a \cdot d_b \cdot n^2 + (d_a \cdot p_b + d_b \cdot p_a)n + p_a \cdot p_b$$

所以可得方程组

$$\begin{cases} d_a \cdot d_b = 1 \\ d_a \cdot p_b + d_b \cdot p_a = 1 \\ p_a \cdot p_b = 0 \\ 50(d_a - d_b) + p_a - p_b = 1 \end{cases}$$

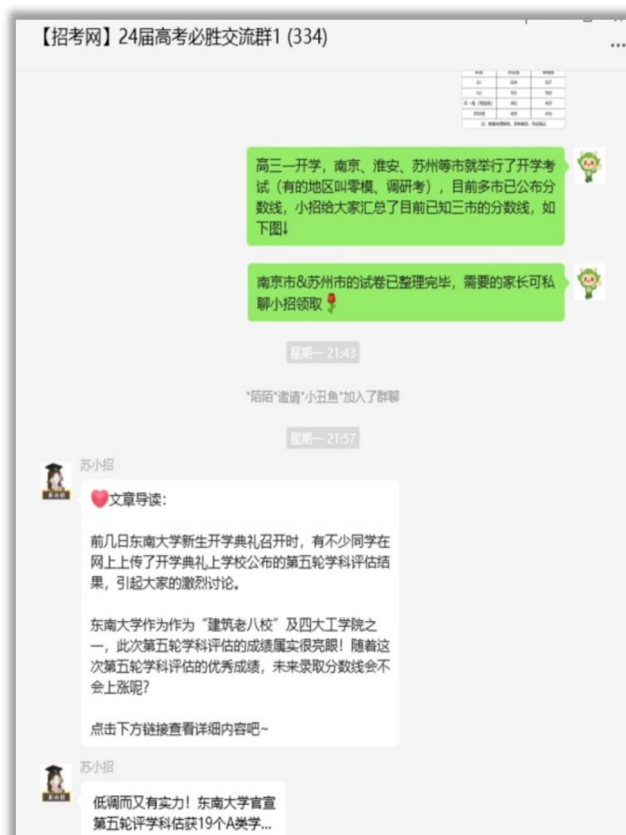
解得 $d = d_a = \frac{51}{50}$



如需第一时间获取相关资讯及备考指南，欢迎加入江苏招生考试网建立的【江苏高考交流群】，群内会分享一手高考资讯、往年真题、学习资料、综评、强基、志愿填报等干货及答疑，群内还有不定时福利发放哦，快加入吧！



(招考网 qq 群资料)



(招考网微信群分享)

↓↓扫描下方二维码，添加苏小招微信，邀请您加入高考交流群，助力孩子高考！



另外，江苏招生考试网联合志愿通策划了多册升学资料，均可免费分享给需要的家长，欢迎咨询获取。

江苏招生考试网&志愿通专属资料库

