2021年普通高等学校招生全国统一考试

数学

本试卷共4页，22小题，满分150分.考试用时120分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.用2*B*铅笔将试卷类型(*A*)填涂在答题卡相应位置上.将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”.

2.作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑：如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案.答案不能答在试卷上.

3.非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答无效.

4.考生必须保持答题卡的整洁.考试结束后，将试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|-2<x<4\}$， $B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{2,3,4\}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用交集的定义可求 $A\cap B$.

【详解】由题设有 $A\cap B=\{2,3\}$，

故选：B.

2. 已知 $z=2-\mathrm{i}$，则 $z(\overline{z}+\mathrm{i})=$（　　）

A. $6-2\mathrm{i}$　　B. $4-2\mathrm{i}$　　C. $6+2\mathrm{i}$　　D. $4+2\mathrm{i}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用复数的乘法和共轭复数的定义可求得结果.

【详解】因为 $z=2-i$，故 $\overline{z}=2+i$，故 $z(\overline{z}+i)=(2-i)(2+2i)=4+4i-2i-2i^2=6+2i$

故选：C.

3. 已知圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$，其侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的母线长为（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】设圆锥的母线长为l，根据圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长可求得l的值，即为所求.

【详解】设圆锥的母线长为l，由于圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长，则$\pi l=2\pi\times\sqrt{2}$，解得$l=2\sqrt{2}$.

故选：B.

4. 下列区间中，函数$f\left(x\right)=7\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$单调递增的区间是（　　）

A. $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$　　C. $\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$　　D. $\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)$

【答案】A

【解析】

【分析】解不等式$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x-\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，利用赋值法可得出结论.

【详解】因为函数$y=\sin x$的单调递增区间为$\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(k\in Z\right)$，

对于函数$f\left(x\right)=7\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，由$2k\pi-\dfrac{\pi}{2}<x-\dfrac{\pi}{6}<2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\left(k\in Z\right)$，

解得$2k\pi-\dfrac{\pi}{3}<x<2k\pi+\dfrac{2\pi}{3}\left(k\in Z\right)$，

取$k=0$，可得函数$f\left(x\right)$的一个单调递增区间为$\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，

则$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\subseteq\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)\not\subset\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$，A选项满足条件，B不满足条件；

取$k=1$，可得函数$f\left(x\right)$的一个单调递增区间为$\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right)$，

$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\not\subset\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$且$\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)\not\subset\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right)\not\subset\left(\dfrac{5\pi}{3},\dfrac{8\pi}{3}\right)$，CD选项均不满足条件.

故选：A.

【点睛】方法点睛：求较为复杂的三角函数的单调区间时，首先化简成 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 形式，再求 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的单调区间，只需把 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体代入 $y=\sin x$ 的相应单调区间内即可，注意要先把 ω 化为正数.

5. 已知 F_1，F_2 是椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的两个焦点，点 M 在 C 上，则 $\left|MF_1\right|\cdot\left|MF_2\right|$ 的最大值为（　　）

A. 13　　　　B. 12　　　　C. 9　　　　D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】本题通过利用椭圆定义得到 $\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a=6$，借助基本不等式 $\left|MF_1\right|\cdot\left|MF_2\right|\le\left(\frac{\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|}{2}\right)^2$ 即可得到答案.

【详解】由题，$a^2=9,b^2=4$，则 $\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|=2a=6$，

所以 $\left|MF_1\right|\cdot\left|MF_2\right|\le\left(\frac{\left|MF_1\right|+\left|MF_2\right|}{2}\right)^2=9$（当且仅当 $\left|MF_1\right|=\left|MF_2\right|=3$ 时，等号成立）.

故选：C.

【点睛】

6. 若 $\tan\theta=-2$，则 $\frac{\sin\theta\left(1+\sin 2\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=$（　　）

A. $-\frac{6}{5}$　　　　B. $-\frac{2}{5}$　　　　C. $\frac{2}{5}$　　　　D. $\frac{6}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】将式子先利用二倍角公式和平方关系配方化简，然后增添分母($1=\sin^2\theta+\cos^2\theta$)，进行齐次化处理，化为正切的表达式，代入 $\tan\theta=-2$ 即可得到结果.

【详解】将式子进行齐次化处理得：

$$\frac{\sin\theta\left(1+\sin 2\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\frac{\sin\theta\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta\right)}{\sin\theta+\cos\theta}=\sin\theta\left(\sin\theta+\cos\theta\right)$$

$$=\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{4-2}{1+4}=\frac{2}{5}.$$

故选：C．

【点睛】易错点睛：本题如果利用 $\tan\theta=-2$，求出 $\sin\theta,\cos\theta$ 的值，可能还需要分象限讨论其正负，通过齐次化处理，可以避开了这一讨论．

7. 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的两条切线，则（　　）

A. $\mathrm{e}^b<a$　　B. $\mathrm{e}^a<b$

C. $0<a<\mathrm{e}^b$　　D. $0<b<\mathrm{e}^a$

【答案】D

【解析】

【分析】解法一：根据导数几何意义求得切线方程，再构造函数，利用导数研究函数图象，结合图形确定结果；

解法二：画出曲线 $y=e^x$ 的图象，根据直观即可判定点 (a,b) 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线.

【详解】在曲线 $y=e^x$ 上任取一点 $P(t,e^t)$，对函数 $y=e^x$ 求导得 $y'=\mathrm{e}^x$，

所以，曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-e^t=e^t(x-t)$，即 $y=e^tx+(1-t)e^t$，

由题意可知，点 (a,b) 在直线 $y=e^tx+(1-t)e^t$ 上，可得 $b=ae^t+(1-t)e^t=(a+1-t)e^t$，

令 $f(t)=(a+1-t)e^t$，则 $f'(t)=(a-t)e^t$.

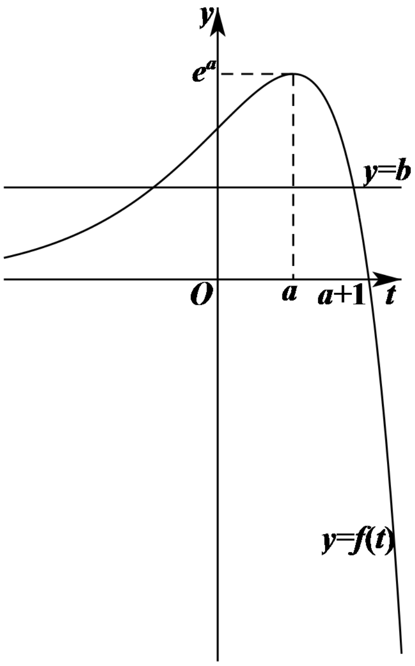
当 $t<a$ 时，$f'(t)>0$，此时函数 $f(t)$ 单调递增，

当 $t>a$ 时，$f'(t)<0$，此时函数 $f(t)$ 单调递减，

所以，$f(t)_{\max}=f(a)=e^a$，

由题意可知，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图象有两个交点，则 $b<f(t)_{\max}=e^a$，

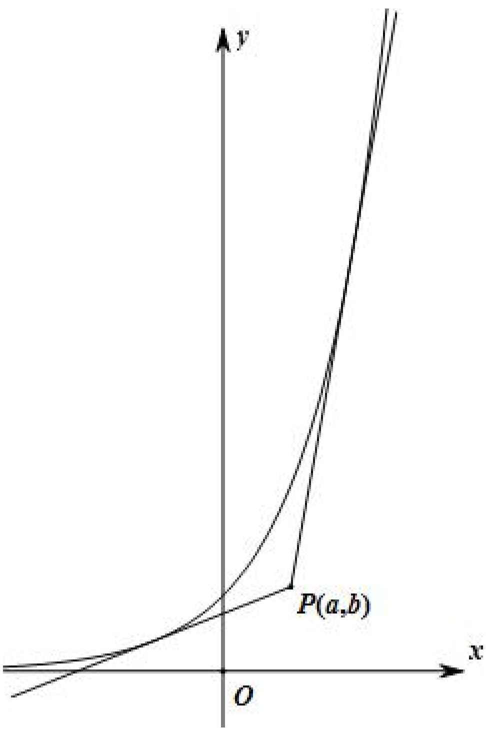
当 $t<a+1$ 时，$f(t)>0$，当 $t>a+1$ 时，$f(t)<0$，作出函数 $f(t)$ 的图象如下图所示：



由图可知，当 $0<b<e^a$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f\left(t\right)$ 的图象有两个交点.

故选：D.

解法二：画出函数曲线 $y=e^x$ 的图象如图所示，根据直观即可判定点 $\left(a,b\right)$ 在曲线下方和 x 轴上方时才可以作出两条切线.由此可知 $0<b<e^a$.



故选：D.

【点睛】解法一是严格的证明求解方法，其中的极限处理在中学知识范围内需要用到指数函数的增长特性进行估计，解法二是根据基于对指数函数的图象的清晰的理解与认识的基础上，直观解决问题的有效方法.

8．有 6 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，6，从中有放回的随机取两次，每次取 1 个球，甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”，乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”，丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”，丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”，则（　　）

A. 甲与丙相互独立　　B. 甲与丁相互独立

C. 乙与丙相互独立　　D. 丙与丁相互独立

【答案】B

【解析】

【分析】根据独立事件概率关系逐一判断

【详解】$P(甲)=\dfrac{1}{6}$，$P(乙)=\dfrac{1}{6}$，$P(丙)=\dfrac{5}{36}$，$P(丁)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，，

$P(甲丙)=0\neq P(甲)P(丙)$，$P(甲丁)=\dfrac{1}{36}=P(甲)P(丁)$，

$P(乙丙)=\dfrac{1}{36}\neq P(乙)P(丙)$，$P(丙丁)=0\neq P(丁)P(丙)$，

故选：B

【点睛】判断事件 A,B 是否独立，先计算对应概率，再判断 $P(A)P(B)=P(AB)$ 是否成立

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目

要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 x_1， x_2，…， x_n，由这组数据得到新样本数据 y_1， y_2，…， y_n，其中 $y_i = x_i + c\,(i = 1, 2, \cdots, n), c$ 为非零常数，则（　　）

A. 两组样本数据的样本平均数相同

B. 两组样本数据的样本中位数相同

C. 两组样本数据的样本标准差相同

D. 两组样本数据的样本极差相同

【答案】CD

【解析】

【分析】A、C 利用两组数据的线性关系有 $E(y) = E(x) + c$ 、$D(y) = D(x)$，即可判断正误；根据中位数、极差的定义，结合已知线性关系可判断 B、D 的正误.

【详解】A：$E(y) = E(x + c) = E(x) + c$ 且 $c \neq 0$，故平均数不相同，错误；

B：若第一组中位数为 x_i，则第二组的中位数为 $y_i = x_i + c$，显然不相同，错误；

C：$D(y) = D(x) + D(c) = D(x)$，故方差相同，正确；

D：由极差的定义知：若第一组的极差为 $x_{\max} - x_{\min}$，则第二组的极差为

$y_{\max} - y_{\min} = (x_{\max} + c) - (x_{\min} + c) = x_{\max} - x_{\min}$，故极差相同，正确；

故选：CD

10. 已知 O 为坐标原点，点 $P_1\left(\cos\alpha, \sin\alpha\right)$，$P_2\left(\cos\beta, -\sin\beta\right)$，$P_3\left(\cos\left(\alpha+\beta\right), \sin\left(\alpha+\beta\right)\right)$，$A\,(1,0)$，则（　　）

A. $\left|\overrightarrow{OP_1}\right| = \left|\overrightarrow{OP_2}\right|$

B. $\left|\overrightarrow{AP_1}\right| = \left|\overrightarrow{AP_2}\right|$

C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

【答案】AC

【解析】

【分析】A、B 写出 $\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{AP_1}$，$\overrightarrow{AP_2}$ 的坐标，利用坐标公式求模，即可判断正误；C、D 根据向量的坐标，应用向量数量积的坐标表示及两角和差公式化简，即可判断正误.

【详解】A：$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,-\sin\beta)$，所以$|\overrightarrow{OP_1}|=\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=1$，

$|\overrightarrow{OP_2}|=\sqrt{(\cos\beta)^2+(-\sin\beta)^2}=1$，故$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|$，正确；

B：$\overrightarrow{AP_1}=(\cos\alpha-1,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{AP_2}=(\cos\beta-1,-\sin\beta)$，所以

$|\overrightarrow{AP_1}|=\sqrt{(\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}=\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=2|\sin\frac{\alpha}{2}|$，

同理$|\overrightarrow{AP_2}|=\sqrt{(\cos\beta-1)^2+\sin^2\beta}=2|\sin\frac{\beta}{2}|$，故$|\overrightarrow{AP_1}|,|\overrightarrow{AP_2}|$不一定相等，错误；

C：由题意得：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_3}=1\times\cos(\alpha+\beta)+0\times\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$，

$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot(-\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)$，正确；

D：由题意得：$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}=1\times\cos\alpha+0\times\sin\alpha=\cos\alpha$，

$\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}=\cos\beta\times\cos(\alpha+\beta)+(-\sin\beta)\times\sin(\alpha+\beta)$

$=\cos\left(\beta+\left(\alpha+\beta\right)\right)=\cos\left(\alpha+2\beta\right)$，故一般来说$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_1}\neq\overrightarrow{OP_2}\cdot\overrightarrow{OP_3}$ **故错误；**

故选：AC

11. 已知点P在圆$\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=16$上，点$A\left(4,0\right)$、$B\left(0,2\right)$，则（　　）

A. 点P到直线AB的距离小于10

B. 点P到直线AB的距离大于2

C. 当$\angle PBA$最小时，$\left|PB\right|=3\sqrt{2}$

D. 当$\angle PBA$最大时，$\left|PB\right|=3\sqrt{2}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】计算出圆心到直线AB的距离，可得出点P到直线AB的距离的取值范围，可判断AB选项的正误；分析可知，当$\angle PBA$最大或最小时，PB与圆M相切，利用勾股定理可判断CD选项的正误.

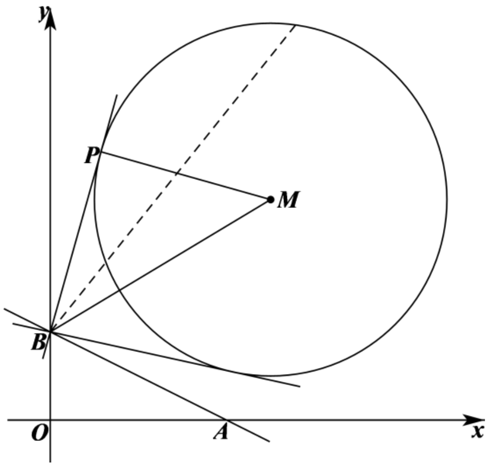
【详解】圆$\left(x-5\right)^2+\left(y-5\right)^2=16$的圆心为$M\left(5,5\right)$，半径为$4$，

直线AB的方程为$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$，即$x+2y-4=0$，

圆心M到直线AB的距离为$\frac{\left|5+2\times5-4\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{11}{\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}>4$，

所以，点 P 到直线 AB 的距离的最小值为 $\frac{11\sqrt{5}}{5}-4<2$，最大值为 $\frac{11\sqrt{5}}{5}+4<10$，A 选项正确，B 选项错误；

如下图所示：



当 $\angle PBA$ 最大或最小时，PB 与圆 M 相切，连接 MP、BM，可知 $PM\perp PB$，

$|BM|=\sqrt{(0-5)^2+(2-5)^2}=\sqrt{34}$，$|MP|=4$，由勾股定理可得 $|BP|=\sqrt{|BM|^2-|MP|^2}=3\sqrt{2}$，CD 选项正确.

故选：ACD.

【点睛】结论点睛：若直线 l 与半径为 r 的圆 C 相离，圆心 C 到直线 l 的距离为 d，则圆 C 上一点 P 到直线 l 的距离的取值范围是 $[d-r,d+r]$.

12. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=AA_1=1$，点 P 满足 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，其中 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，则（　　）

A. 当 $\lambda=1$ 时，$\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B. 当 $\mu=1$ 时，三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值

C. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1P\perp BP$

D. 当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，有且仅有一个点 P，使得 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P

【答案】BD

【解析】

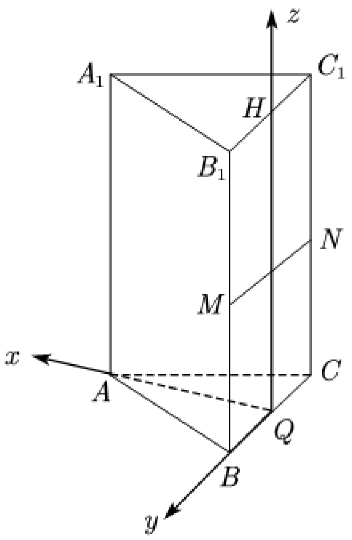
【分析】对于 A，由于等价向量关系，联系到一个三角形内，进而确定点的坐标；

对于 B，将 P 点的运动轨迹考虑到一个三角形内，确定路线，进而考虑体积是否为定值；

对于 C，考虑借助向量的平移将 P 点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解 P 点的个数；

对于 D，考虑借助向量的平移将 P 点轨迹确定，进而考虑建立合适的直角坐标系来求解 P 点的个数.

【详解】



易知，点 P 在矩形 BCC_1B_1 内部（含边界）.

对于 A，当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{CC_1}$，即此时 $P\in$ 线段 CC_1，$\triangle AB_1P$ 周长不是定值，故 A 错误；

对于 B，当 $\mu=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BB_1}+\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$，故此时 P 点轨迹为线段 B_1C_1，而 $B_1C_1//BC$，$B_1C_1//$ 平面 A_1BC，则有 P 到平面 A_1BC 的距离为定值，所以其体积为定值，故 B 正确.

对于 C，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，取 BC，B_1C_1 中点分别为 Q，H，则 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BQ}+\mu\overrightarrow{QH}$，所以 P 点轨迹为线段 QH，不妨建系解决，建立空间直角坐标系如图，$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,1\right)$，$P(0,0,\mu)$，$B\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，则 $\overrightarrow{A_1P}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\mu-1\right)$，$\overrightarrow{BP}=\left(0,-\frac{1}{2},\mu\right)$，$\overrightarrow{A_1P}\cdot\overrightarrow{BP}=\mu(\mu-1)=0$，所以 $\mu=0$ 或 $\mu=1$. 故 H,Q 均满足，故 C 错误；

对于 D，当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，取 BB_1，CC_1 中点为 M,N. $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BM}+\lambda\overrightarrow{MN}$，所以 P 点轨迹为线段 MN. 设 $P\left(0,y_0,\frac{1}{2}\right)$，因为 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,0\right)$，所以 $\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},y_0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{A_1B}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},-1\right)$，

所以 $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}y_0-\frac{1}{2}=0\Rightarrow y_0=-\frac{1}{2}$，此时 P 与 N 重合，故 D 正确.

故选：BD.

【点睛】本题主要考查向量的等价替换，关键之处在于所求点的坐标放在三角形内.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f\left(x\right)=x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)$ 是偶函数，则 $a=$_____.

【答案】1

【解析】

【分析】利用偶函数的定义可求参数 a 的值.

【详解】因为 $f\left(x\right)=x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)$，故 $f\left(-x\right)=-x^3\left(a\cdot 2^{-x}-2^x\right)$，

因为 $f\left(x\right)$ 为偶函数，故 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，

时 $x^3\left(a\cdot 2^x-2^{-x}\right)=-x^3\left(a\cdot 2^{-x}-2^x\right)$，整理得到 $\left(a-1\right)\left(2^x+2^{-x}\right)=0$，

故 $a=1$，

故答案为：1

14. 已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，P 为 C 上一点，PF 与 x 轴垂直，Q 为 x 轴上一点，且 $PQ\perp OP$，若 $\left|FQ\right|=6$，则 C 的准线方程为______.

【答案】 $x=-\dfrac{3}{2}$

【解析】

【分析】先用坐标表示 P，Q，再根据向量垂直坐标表示列方程，解得 p，即得结果.

【详解】抛物线 C：$y^2=2px$ （$p>0$）的焦点 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，

∵P 为 C 上一点，PF 与 x 轴垂直，

所以 P 的横坐标为 $\dfrac{p}{2}$，代入抛物线方程求得 P 的纵坐标为 $\pm p$，

不妨设 $P(\dfrac{p}{2},p)$，

因为 Q 为 x 轴上一点，且 $PQ\perp OP$，所以 Q 在 F 的右侧，

又$\because |FQ|=6$，

$\therefore Q(6+\frac{p}{2},0),\therefore \overrightarrow{PQ}=(6,-p)$

因为$PQ\perp OP$，所以$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OP}=\frac{p}{2}\times 6-p^2=0$，

$\because p>0,\therefore p=3$，

所以C的准线方程为$x=-\frac{3}{2}$

故答案为：$x=-\frac{3}{2}$.

【点睛】利用向量数量积处理垂直关系是本题关键.

15. 函数$f\left(x\right)=\left|2x-1\right|-2\ln x$的最小值为______.

【答案】1

【解析】

【分析】由解析式知$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，讨论$0<x\le\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}<x\le 1$、$x>1$，并结合导数研究的单调性，即可求$f(x)$最小值.

【详解】由题设知：$f(x)=|2x-1|-2\ln x$定义域为$(0,+\infty)$，

$\therefore$当$0<x\le\frac{1}{2}$时，$f(x)=1-2x-2\ln x$，此时$f(x)$单调递减；

当$\frac{1}{2}<x\le 1$时，$f(x)=2x-1-2\ln x$，有$f'(x)=2-\frac{2}{x}\le 0$，此时$f(x)$单调递减；

当$x>1$时，$f(x)=2x-1-2\ln x$，有$f'(x)=2-\frac{2}{x}>0$，此时$f(x)$单调递增；

又$f(x)$在各分段的界点处连续，

$\therefore$综上有：$0<x\le 1$时，$f(x)$单调递减，$x>1$时，$f(x)$单调递增；

$\therefore f(x)\ge f(1)=1$

故答案为：1.

16. 某校学生在研究民间剪纸艺术时，发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折，规格为$20\text{dm}\times 12\text{dm}$的长方形纸，对折1次共可以得到$10\text{dm}\times 12\text{dm}$，$20\text{dm}\times 6\text{dm}$两种规格的图形，它们的面积之和$S_1=240\text{dm}^2$，对折2次共可以得到$5\text{dm}\times 12\text{dm}$，$10\text{dm}\times 6\text{dm}$，$20\text{dm}\times 3\text{dm}$三种规格的图形，它们的面积之和$S_2=180\text{dm}^2$，以此类推，则对折4次共可以得到不同规格图形的种数为______；如果对

折 n 次，那么 $\sum_{k=1}^{n} S_k =$______dm^2.

【答案】 ①. 5 ②. $720-\frac{15(3+n)}{2^{n-4}}$

【解析】

【分析】(1) 按对折列举即可；(2) 根据规律可得 S_n，再根据错位相减法得结果.

【详解】(1) 由对折 2 次共可以得到 $5\mathrm{dm}\times 12\mathrm{dm}$，$10\mathrm{dm}\times 6\mathrm{dm}$，$20\mathrm{dm}\times 3\mathrm{dm}$ 三种规格的图形，所以对着三次的结果有：$\frac{5}{2}\times 12, 5\times 6, 10\times 3; 20\times\frac{3}{2}$，共 4 种不同规格（单位 dm^2）；

故对折 4 次可得到如下规格：$\frac{5}{4}\times 12$，$\frac{5}{2}\times 6$，5×3，$10\times\frac{3}{2}$，$20\times\frac{3}{4}$，共 5 种不同规格；

(2) 由于每次对着后的图形的面积都减小为原来的一半，故各次对着后的图形，不论规格如何，其面积成公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，首项为 $120\left(\mathrm{dm}^2\right)$，第 n 次对折后的图形面积为 $120\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，对于第 n 此对折后的图形的规格形状种数，根据 (1) 的过程和结论，猜想为 $n+1$ 种（证明从略），故得猜想 $S_n=\frac{120(n+1)}{2^{n-1}}$，

设 $S=\sum_{k=1}^{n} S_k=\frac{120\times 2}{2^0}+\frac{120\times 3}{2^1}+\frac{120\times 4}{2^2}+\mathrm{L}\ +\frac{120(n+1)}{2^{n-1}}$，

则 $\frac{1}{2}S=\frac{120\times 2}{2^1}+\frac{120\times 3}{2^2}+\cdots+\frac{120n}{2^{n-1}}+\frac{120(n+1)}{2^n}$，

两式作差得：

$$\frac{1}{2}S=240+120\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{120(n+1)}{2^n}$$

$$=240+\frac{60\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{120(n+1)}{2^n}$$

$$=360-\frac{120}{2^{n-1}}-\frac{120(n+1)}{2^n}=360-\frac{120(n+3)}{2^n},$$

因此，$S=720-\frac{240(n+3)}{2^n}=720-\frac{15(n+3)}{2^{n-4}}$.

故答案为：5；$720-\frac{15(n+3)}{2^{n-4}}$.

【点睛】方法点睛：数列求和的常用方法：

（1）对于等差等比数列，利用公式法可直接求解；

（2）对于$\left\{a_nb_n\right\}$结构，其中$\left\{a_n\right\}$是等差数列，$\left\{b_n\right\}$是等比数列，用错位相减法求和；

（3）对于$\left\{a_n+b_n\right\}$结构，利用分组求和法；

（4）对于$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$结构，其中$\left\{a_n\right\}$是等差数列，公差为$d\left(d\neq 0\right)$，则$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$，利用裂项相消法求和.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1, n\text{为奇数},\\ a_n+2, n\text{为偶数}.\end{cases}$

（1）记$b_n=a_{2n}$，写出b_1，b_2，并求数列$\left\{b_n\right\}$的通项公式；

（2）求$\left\{a_n\right\}$的前 20 项和.

【答案】（1）$b_1=2,b_2=5,b_n=3n-1$；（2）300.

【解析】

【分析】(1)方法一：由题意结合递推关系式确定数列$\left\{b_n\right\}$的特征，然后求和其通项公式即可；

(2)方法二：分组求和，结合等差数列前n项和公式即可求得数列的前 20 项和.

【详解】解：（1）**[方法一]【最优解】:**

显然$2n$为偶数，则$a_{2n+1}=a_{2n}+2,a_{2n+2}=a_{2n+1}+1$，

所以$a_{2n+2}=a_{2n}+3$，即$b_{n+1}=b_n+3$，且$b_1=a_2=a_1+1=2$，

所以$\left\{b_n\right\}$是以 2 为首项，3 为公差的等差数列，

于是$b_1=2,b_2=5,b_n=3n-1$.

[方法二]：奇偶分类讨论

由题意知$a_1=1,a_2=2,a_3=4$，所以$b_1=a_2=2,b_2=a_4=a_3+1=5$.

由 $a_{n+1}-a_n=1$（n 为奇数）及 $a_{n+1}-a_n=2$（n 为偶数）可知，

数列从第一项起，

若 n 为奇数，则其后一项减去该项的差为 1，

若 n 为偶数，则其后一项减去该项的差为 2.

所以 $a_{n+2}-a_n=3(n\in N^*)$，则 $b_n=b_1+(n-1)\times 3=3n-1$.

[方法三]：累加法

由题意知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\frac{3}{2}+\frac{(-1)^n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $b_1=a_2=a_1+\frac{3}{2}+\frac{(-1)^1}{2}=1+1=2$，

$b_2=a_4=a_3+\frac{3}{2}+\frac{(-1)^3}{2}=a_3+1=a_2+\frac{3}{2}+\frac{(-1)^2}{2}+1=a_2+2+1=2+3=5$，

则

$b_n=a_{2n}=(a_{2n}-a_{2n-1})+(a_{2n-1}-a_{2n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=1+2+1+2+\cdots+2+1+a_1$

$=n\times 1+2(n-1)+1=3n-1$.

所以 $b_1=2,b_2=5$，数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=3n-1$.

（2）**[方法一]：奇偶分类讨论**

$S_{20}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+a_5+\cdots a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})$

$=(b_1-1+b_2-1+b_3-1+\cdots+b_{10}-1)+b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{10}$

$=2\times\frac{(b_1+b_{10})\times 10}{2}-10=300$.

[方法二]：分组求和

由题意知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_{2n}=a_{2n-1}+1,a_{2n+1}=a_{2n}+2$，

所以 $a_{2n+1}=a_{2n}+2=a_{2n-1}+3$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项，3 为公差的等差数列；

同理，由 $a_{2n+2}=a_{2n+1}+1=a_{2n}+3$ 知数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是以 2 为首项，3 为公差的等差数列.

从而数列 $\{a_n\}$ 的前 20 项和为：

$S_{20}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})=10\times1+\frac{10\times9}{2}\times3+10\times2+\frac{10\times9}{2}\times3=300$.

【整体点评】(1)方法一：由题意讨论$\{b_n\}$的性质为最一般的思路和最优的解法；

方法二：利用递推关系式分类讨论奇偶两种情况，然后利用递推关系式确定数列的性质；

方法三：写出数列$\{a_n\}$的通项公式，然后累加求数列$\{b_n\}$的通项公式，是一种更加灵活的思路.

(2)方法一：由通项公式分奇偶的情况求解前n项和是一种常规的方法；

方法二：分组求和是常见的数列求和的一种方法，结合等差数列前n项和公式和分组的方法进行求和是一种不错的选择.

18．某学校组织"一带一路"知识竞赛，有A，B两类问题，每位参加比赛的同学先在两类问题中选择一类并从中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该同学比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该同学比赛结束.A类问题中的每个问题回答正确得20分，否则得0分；B类问题中的每个问题回答正确得80分，否则得0分，已知小明能正确回答A类问题的概率为0.8，能正确回答B类问题的概率为0.6，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（1）若小明先回答A类问题，记X为小明的累计得分，求X的分布列；

（2）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

【答案】（1）见解析；（2）B类.

【解析】

【分析】（1）通过题意分析出小明累计得分X的所有可能取值，逐一求概率列分布列即可.（2）与（1）类似，找出先回答B类问题的数学期望，比较两个期望的大小即可.

【详解】（1）由题可知，X的所有可能取值为0，20，100.

$P(X=0)=1-0.8=0.2$；

$P(X=20)=0.8(1-0.6)=0.32$；

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$.

所以X的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

（2）由（1）知，$E(X)=0\times0.2+20\times0.32+100\times0.48=54.4$.

若小明先回答B问题，记Y为小明的累计得分，则Y的所有可能取值为0，80，100.

$P(Y=0)=1-0.6=0.4$；

$P(Y=80)=0.6(1-0.8)=0.12$；

$P(X=100)=0.8\times0.6=0.48$.

所以$E(Y)=0\times0.4+80\times0.12+100\times0.48=57.6$.

因为$54.4<57.6$，所以小明应选择先回答B类问题.

19. 记$\triangle ABC$是内角A，B，C的对边分别为a，b，c.已知$b^2=ac$，点D在边AC上，$BD\sin\angle ABC=a\sin C$.

（1）证明：$BD=b$；

（2）若$AD=2DC$，求$\cos\angle ABC$.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$.

【解析】

【分析】（1）根据正弦定理的边角关系有$BD=\dfrac{ac}{b}$，结合已知即可证结论.

（2）方法一：两次应用余弦定理，求得边a与c的关系，然后利用余弦定理即可求得$\cos\angle ABC$的值.

【详解】（1）设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，由正弦定理，

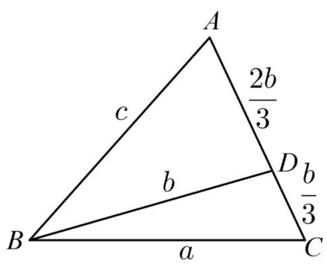
得$\sin\angle ABC=\dfrac{b}{2R},\sin C=\dfrac{c}{2R}$，

因为$BD\sin\angle ABC=a\sin C$，所以$BD\cdot\dfrac{b}{2R}=a\cdot\dfrac{c}{2R}$，即$BD\cdot b=ac$.

又因为$b^2=ac$，所以$BD=b$.

（2）**[方法一]【最优解】：两次应用余弦定理**

因为$AD=2DC$，如图，在$\triangle ABC$中，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，①



在$\triangle BCD$中，$\cos C=\dfrac{a^2+(\frac{b}{3})^2-b^2}{2a\cdot\frac{b}{3}}$. ②

由①②得$a^2+b^2-c^2=3\left[a^2+(\frac{b}{3})^2-b^2\right]$，整理得$2a^2-\frac{11}{3}b^2+c^2=0$.

又因为$b^2=ac$，所以$6a^2-11ac+3c^2=0$，解得$a=\frac{c}{3}$或$a=\frac{3c}{2}$，

当$a=\frac{c}{3},b^2=ac=\frac{c^2}{3}$时，$\cos\angle ABC=\dfrac{(\frac{c}{3})^2+c^2-\frac{c^2}{3}}{2\cdot\frac{c}{2}\cdot c}=\frac{7}{6}$（舍去）.

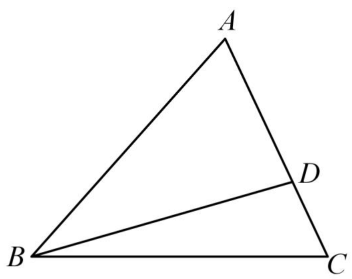
当$a=\frac{3c}{2},b^2=ac=\frac{3c^2}{2}$时，$\cos\angle ABC=\dfrac{(\frac{3c}{2})^2+c^2-\frac{3c^2}{2}}{2\cdot\frac{3c}{2}\cdot c}=\frac{7}{12}$.

所以$\cos\angle ABC=\frac{7}{12}$.

[方法二]：等面积法和三角形相似

如图，已知$AD=2DC$，则$S_{\triangle ABD}=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$，

即$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}b^2\sin\angle ADB=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}ac\times\sin\angle ABC$，



而$b^2=ac$，即$\sin\angle ADB=\sin\angle ABC$，

故有$\angle ADB=\angle ABC$，从而$\angle ABD=\angle C$.

由$b^2=ac$，即$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$，即$\frac{CA}{CB}=\frac{BA}{BD}$，即$\triangle ACB\backsim\triangle ABD$，

故$\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AC}$，即$\dfrac{\frac{2b}{3}}{c}=\frac{c}{b}$，

又$b^2=ac$，所以$c=\frac{2}{3}a$，

则 $\cos\angle ABC=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7}{12}$.

[方法三]：正弦定理、余弦定理相结合

由（1）知 $BD=b=AC$，再由 $AD=2DC$ 得 $AD=\dfrac{2}{3}b,CD=\dfrac{1}{3}b$.

在 $\triangle ADB$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AD}{\sin\angle ABD}=\dfrac{BD}{\sin A}$.

又 $\angle ABD=\angle C$，所以 $\dfrac{\frac{2}{3}b}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin A}$，化简得 $\sin C=\dfrac{2}{3}\sin A$.

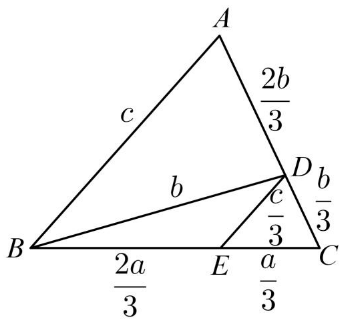
在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理知 $c=\dfrac{2}{3}a$，又由 $b^2=ac$，所以 $b^2=\dfrac{2}{3}a^2$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+\frac{4}{9}a^2-\frac{2}{3}a^2}{2\times\frac{2}{3}a^2}=\dfrac{7}{12}$.

故 $\cos\angle ABC=\dfrac{7}{12}$.

[方法四]：构造辅助线利用相似的性质

如图，作 $DE\parallel AB$，交 BC 于点 E，则 $\triangle DEC\backsim\triangle ABC$.



由 $AD=2DC$，得 $DE=\dfrac{c}{3},EC=\dfrac{a}{3},BE=\dfrac{2a}{3}$.

在 $\triangle BED$ 中，$\cos\angle BED=\dfrac{(\frac{2a}{3})^2+(\frac{c}{3})^2-b^2}{2\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{c}{3}}$.

在 $\triangle ABC$ 中 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$.

因为 $\cos\angle ABC=-\cos\angle BED$，

所以 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{(\frac{2a}{3})^2+(\frac{c}{3})^2-b^2}{2\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{c}{3}}$，

整理得 $6a^2-11b^2+3c^2=0$.

又因为 $b^2=ac$，所以 $6a^2-11ac+3c^2=0$，

即 $a=\dfrac{c}{3}$ 或 $a=\dfrac{3}{2}c$.

下同解法 1.

[方法五]：平面向量基本定理

因为 $AD=2DC$，所以 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DC}$.

以向量 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}$ 为基底，有 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

所以 $\overrightarrow{BD}^2=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BC}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{9}\overrightarrow{BA}^2$，

即 $b^2=\dfrac{4}{9}a^2+\dfrac{4}{9}ac\cos\angle ABC+\dfrac{1}{9}c^2$，

又因为 $b^2=ac$，所以 $9ac=4a^2+4ac\cdot\cos\angle ABC+c^2$. ③

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$，

所以 $ac=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$ ④

联立③④，得 $6a^2-11ac+3c^2=0$.

所以 $a=\dfrac{3}{2}c$ 或 $a=\dfrac{1}{3}c$.

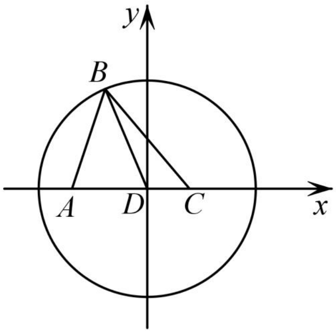
下同解法 1.

[方法六]：建系求解

以 D 为坐标原点， AC 所在直线为 x 轴，过点 D 垂直于 AC 的直线为 y 轴，

DC 长为单位长度建立直角坐标系，

如图所示，则 $D(0,0),A(-2,0),C(1,0)$.



由（1）知，$BD=b=AC=3$，所以点 B 在以 D 为圆心，3 为半径的圆上运动.

设 $B(x,y)(-3<x<3)$，则 $x^2+y^2=9$．⑤

由 $b^2=ac$ 知，$|BA|\cdot|BC|=|AC|^2$，

即 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-1)^2+y^2}=9$．⑥

联立⑤⑥解得 $x=-\dfrac{7}{4}$ 或 $x=\dfrac{7}{2}\geq 3$（舍去），$y^2=\dfrac{95}{16}$，

代入⑥式得 $a=|BC|=\dfrac{3\sqrt{6}}{2},c=|BA|=\sqrt{6},b=3$，

由余弦定理得 $\cos\angle ABC=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7}{12}$.

【整体点评】(2)方法一：两次应用余弦定理是一种典型的方法，充分利用了三角形的性质和正余弦定理的性质解题；

方法二：等面积法是一种常用的方法，很多数学问题利用等面积法使得问题转化为更为简单的问题，相似是三角形中的常用思路；

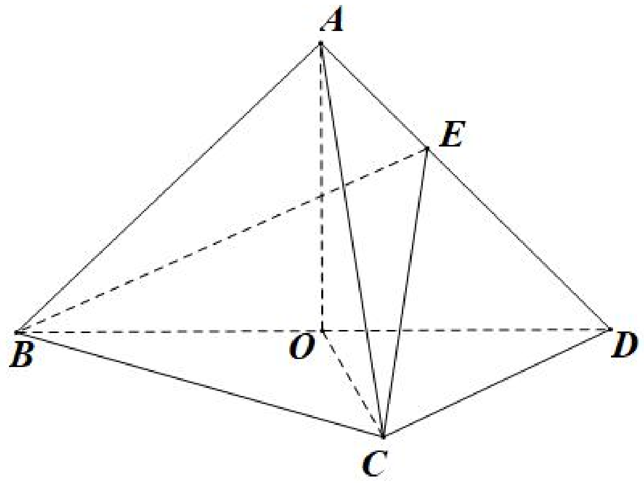
方法三：正弦定理和余弦定理相结合是解三角形问题的常用思路；

方法四：构造辅助线作出相似三角形，结合余弦定理和相似三角形是一种确定边长比例关系的不错选择；

方法五：平面向量是解决几何问题的一种重要方法，充分利用平面向量基本定理和向量的运算法则可以将其与余弦定理充分结合到一起；

方法六：建立平面直角坐标系是解析几何的思路，利用此方法数形结合充分挖掘几何性质使得问题更加直观化.

20. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 BCD，$AB=AD$，O 为 BD 的中点.



（1）证明：$OA \perp CD$；

（2）若$\triangle OCD$是边长为1的等边三角形，点E在棱AD上，$DE = 2EA$，且二面角$E-BC-D$的大小为$45°$，求三棱锥$A-BCD$的体积.

【答案】(1)证明见解析；(2)$\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

【解析】

【分析】(1)由题意首先证得线面垂直，然后利用线面垂直的定义证明线线垂直即可；

(2)方法二：利用几何关系找到二面角的平面角，然后结合相关的几何特征计算三棱锥的体积即可.

【详解】（1）因为$AB = AD$，O是BD中点，所以$OA \perp BD$，

因为$OA \subset$平面ABD，平面$ABD \perp$平面BCD，

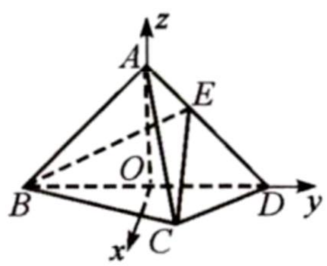
且平面$ABD \cap$平面$BCD = BD$，所以$OA \perp$平面BCD.

因为$CD \subset$平面BCD，所以$OA \perp CD$.

（2）**[方法一]：通性通法—坐标法**

如图所示，以O为坐标原点，OA为z轴，OD为y轴，垂直OD且过O的直线为x轴，建立空间直角坐标系$O-xyz$，

则$C(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0), D(0,1,0), B(0,-1,0)$，设$A(0,0,m), E(0,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}m)$，



所以 $\overrightarrow{EB}=(0,-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}m),\overrightarrow{BC}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},0)$，

设 $\overset{r}{n}=\left(x,y,z\right)$ 为平面 EBC 的法向量，

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{EB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$ 可求得平面 EBC 的一个法向量为 $\vec{n}=(-\sqrt{3},1,-\frac{2}{m})$.

又平面 BCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OA}=\left(0,0,m\right)$，

所以 $\cos\left\langle\vec{n},\overrightarrow{OA}\right\rangle=\left|\dfrac{-2}{m\cdot\sqrt{4+\dfrac{4}{m^2}}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $m=1$.

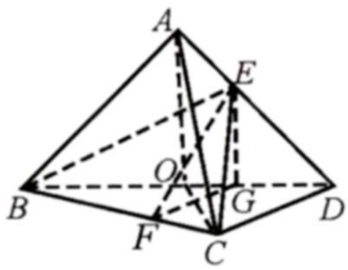
又点 C 到平面 ABD 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $V_{A-BCD}=V_{C-ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

所以三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

[方法二]【最优解】：作出二面角的平面角

如图所示，作 $EG\perp BD$，垂足为点 G.

作 $GF\perp BC$，垂足为点 F，连结 EF，则 $OA\parallel EG$.



因为 $OA\perp$ 平面 BCD，所以 $EG\perp$ 平面 BCD，

Ð EFG 为二面角 $E-BC-D$ 的平面角.

因为 $\angle EFG=45°$，所以 $EG=FG$.

由已知得 $OB=OD=1$，故 $OB=OC=1$.

又 $\angle OBC=\angle OCB=30°$，所以 $BC=\sqrt{3}$.

因为 $GD=\frac{2}{3},GB=\frac{4}{3},FG=\frac{2}{3}CD=\frac{2}{3},EG=\frac{2}{3},OA=1$，

$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times OA=\frac{1}{3}\times2S_{\triangle BOC}\times OA=\frac{1}{3}\times2\times(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times1\times1)\times1=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

[方法三]：三面角公式

考虑三面角 $B-EDC$，记 $\angle EBD$ 为 α， $\angle EBC$ 为 β， $\angle DBC=30°$，

记二面角 $E-BC-D$ 为 θ．据题意，得 $\theta=45°$．

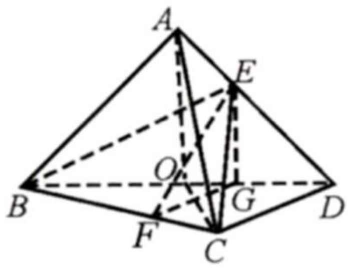
对 β 使用三面角的余弦公式，可得 $\cos\beta=\cos\alpha\cdot\cos 30°$，

化简可得 $\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$． ①

使用三面角的正弦公式，可得 $\sin\beta=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\theta}$，化简可得 $\sin\beta=\sqrt{2}\sin\alpha$． ②

将①②两式平方后相加，可得 $\dfrac{3}{4}\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=1$，

由此得 $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}\cos^2\alpha$，从而可得 $\tan\alpha=\pm\dfrac{1}{2}$．



如图可知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，即有 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，

根据三角形相似知，点 G 为 OD 的三等分点，即可得 $BG=\dfrac{4}{3}$，

结合 α 的正切值，

可得 $EG=\dfrac{2}{3},OA=1$ 从而可得三棱锥 $A-BCD$ 的体积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$．

【整体点评】(2)方法一：建立空间直角坐标系是解析几何中常用的方法，是此类题的通性通法，其好处在于将几何问题代数化，适合于复杂图形的处理；

方法二：找到二面角的平面角是立体几何的基本功，在找出二面角的同时可以对几何体的几何特征有更加深刻的认识，该法为本题的最优解.

方法三：三面角公式是一个优美的公式，在很多题目的解析中灵活使用三面角公式可以使得问题更加简单、直观、迅速.

21. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $F_1\left(-\sqrt{17},0\right)$、$F_2\left(\sqrt{17},0\right),\left|MF_1\right|-\left|MF_2\right|=2$，点 M 的轨迹为 C.

（1）求 C 的方程；

（2）设点T在直线$x=\frac{1}{2}$上，过T的两条直线分别交C于A、B两点和P，Q两点，且$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，求直线$AB$的斜率与直线$PQ$的斜率之和.

【答案】（1） $x^2-\frac{y^2}{16}=1\left(x\geq1\right)$；（2） 0.

【解析】

【分析】(1) 利用双曲线的定义可知轨迹C是以点F_1、F_2为左、右焦点双曲线的右支，求出a、b的值，即可得出轨迹C的方程；

(2)方法一：设出点的坐标和直线方程，联立直线方程与曲线C的方程，结合韦达定理求得直线的斜率，最后化简计算可得k_1+k_2的值.

【详解】(1) 因为$|MF_1|-|MF_2|=2<|F_1F_2|=2\sqrt{17}$，

所以，轨迹C是以点F_1、F_2为左、右焦点的双曲线的右支，

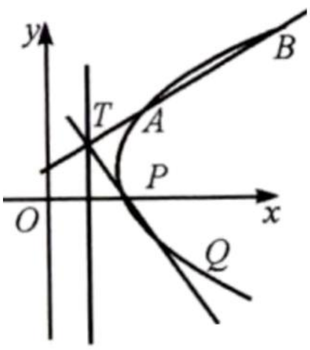
设轨迹C的方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，则$2a=2$，可得$a=1$，$b=\sqrt{17-a^2}=4$，

所以，轨迹C的方程为$x^2-\frac{y^2}{16}=1\left(x\geq1\right)$.

（2）**[方法一]** **【最优解】：直线方程与双曲线方程联立**

如图所示，设$T(\frac{1}{2},n)$，

设直线AB的方程为$y-n=k_1(x-\frac{1}{2}),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.



联立$\begin{cases}y-n=k_1(x-\frac{1}{2})\\x^2-\frac{y^2}{16}=1\end{cases}$，

化简得 $(16-k_1^2)x^2+(k_1^2-2k_1n)x-\frac{1}{4}k_1^2-n^2+k_1n-16=0$.

则 $x_1+x_2=\frac{k_1^2-2k_1n}{k_1^2-16},x_1x_2=\frac{\frac{1}{4}k_1^2+n^2-k_1n+16}{k_1^2-16}$.

故 $|TA|=\sqrt{1+k_1^2}(x_1-\frac{1}{2}),|TB|=\sqrt{1+k_1^2}(x_2-\frac{1}{2})$.

则 $|TA|\cdot|TB|=(1+k_1^2)(x_1-\frac{1}{2})(x_2-\frac{1}{2})=\frac{(n^2+12)(1+k_1^2)}{k_1^2-16}$.

设 PQ 的方程为 $y-n=k_2(x-\frac{1}{2})$，同理 $|TP|\cdot|TQ|=\frac{(n^2+12)(1+k_2^2)}{k_2^2-16}$.

因为 $|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，所以 $\frac{1+k_1^2}{k_1^2-16}=\frac{1+k_2^2}{k_2^2-16}$,

化简得 $1+\frac{17}{k_1^2-16}=1+\frac{17}{k_2^2-16}$,

所以 $k_1^2-16=k_2^2-16$，即 $k_1^2=k_2^2$.

因为 $k_1\neq k_1$，所以 $k_1+k_2=0$.

[方法二] ：参数方程法

设 $T(\frac{1}{2},m)$. 设直线 AB 的倾斜角为 θ_1 ,

则其参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}+t\cos\theta_1\\ y=m+t\sin\theta_1\end{cases}$,

联立直线方程与曲线 C 的方程 $16x^2-y^2-16=0(x\geq 1)$,

可得 $16(\frac{1}{4}+t^2\cos^2\theta_1+t\cos\theta_1)-(m^2+t^2\sin^2\theta_1+2mt\sin\theta_1)-16=0$,

整理得 $(16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1)t^2+(16\cos\theta_1-2m\sin\theta_1)t-(m^2+12)=0$.

设 $TA=t_1,TB=t_2$,

由根与系数的关系得 $|TA|\cdot|TB|=t_1\cdot t_2=\frac{-(m^2+12)}{16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1}=\frac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_1}$.

设直线 PQ 的倾斜角为 θ_2， $TP=t_3,TQ=t_4$,

同理可得$|TP|\cdot|TQ|=t_3\cdot t_4=\dfrac{m^2+12}{1-17\cos^2\theta_2}$

由$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，得$\cos^2\theta_1=\cos^2\theta_2$.

因为$\theta_1\neq\theta_2$，所以$\cos\theta_1=-\cos\theta_2$.

由题意分析知$\theta_1+\theta_2=\pi$. 所以$\tan\theta_1+\tan\theta_2=0$，

故直线AB的斜率与直线PQ的斜率之和为0.

[方法三]：利用圆幂定理

因为$|TA|\cdot|TB|=|TP|\cdot|TQ|$，由圆幂定理知$A$，$B$，$P$，$Q$四点共圆.

设$T(\frac{1}{2},t)$,直线AB的方程为$y-t=k_1(x-\frac{1}{2})$，

直线PQ的方程为$y-t=k_2(x-\frac{1}{2})$,

则二次曲线$(k_1x-y-\frac{k_1}{2}+t)(k_2x-y-\frac{k_2}{2}+t)=0$.

又由$x^2-\frac{y^2}{16}=1$，得过A，B，P，Q四点的二次曲线系方程为：

$$\lambda(k_1x-y-\frac{k_1}{2}+t)(k_2x-y-\frac{k_2}{2}+t)+\mu(x^2-\frac{y^2}{16}-1)=0(\lambda\neq0)，$$

整理可得：

$$(\lambda k_1k_2+\mu)x^2+(\lambda-\frac{\mu}{16})y^2-\lambda(k_1+k_2)xy+\left[t(k_1+k_2)-k_1k_2\right]\lambda x+(\frac{k_1+k_2}{2}-2t)\lambda y+m=0，$$

其中$m=\lambda\left[t^2+\frac{k_1k_2}{4}-\frac{t}{2}(k_1+k_2)\right]-\mu$.

由于A，B，P，Q四点共圆，则xy项的系数为0，即$k_1+k_2=0$.

【整体点评】(2)方法一：直线方程与二次曲线的方程联立，结合韦达定理处理圆锥曲线问题是最经典的方法，它体现了解析几何的特征，是该题的通性通法，也是最优解；

方法二：参数方程的使用充分利用了参数的几何意义，要求解题过程中对参数有深刻的理解，并能够灵活的应用到题目中.

方法三：圆幂定理的应用更多的提现了几何的思想，二次曲线系的应用使得计算更为简单.

22. 已知函数$f(x)=x(1-\ln x)$.

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）设 a ， b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$ ，证明： $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$.

【答案】（1） $f\left(x\right)$ 的递增区间为 $\left(0,1\right)$ ，递减区间为 $\left(1,+\infty\right)$ ；（2）证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 首先确定函数的定义域，然后求得导函数的解析式，由导函数的符号即可确定原函数的单调性.

(2)方法二：将题中的等式进行恒等变换，令 $\frac{1}{a}=m,\frac{1}{b}=n$ ，命题转换为证明： $2<m+n<e$ ，然后构造对称差函数，结合函数零点的特征和函数的单调性即可证得题中的结论.

【详解】(1) $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$.

由 $f\left(x\right)=x\left(1-\ln x\right)$ 得， $f'\left(x\right)=-\ln x$ ，

当 $x=1$ 时， $f'\left(x\right)=0$ ；当 $x\in\left(0,1\right)$ 时 $f'\left(x\right)>0$ ；当 $x\in\left(1,+\infty\right)$ 时， $f'\left(x\right)<0$.

故 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right]$ 内为增函数，在区间 $\left[1,+\infty\right)$ 内为减函数，

(2)[方法一]：等价转化

由 $b\ln a-a\ln b=a-b$ 得 $\frac{1}{a}(1-\ln\frac{1}{a})=\frac{1}{b}(1-\ln\frac{1}{b})$ ，即 $f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$.

由 $a^1\quad b$ ，得 $\frac{1}{a}\neq\frac{1}{b}$.

由（1）不妨设 $\frac{1}{a}\in(0,1),\frac{1}{b}\in(1,+\infty)$ ，则 $f(\frac{1}{a})>0$ ，从而 $f(\frac{1}{b})>0$ ，得 $\frac{1}{b}\in(1,e)$ ，

①令 $g\left(x\right)=f\left(2-x\right)-f\left(x\right)$ ，

则 $g'(x)=-f'(2-x)-f'(x)=\ln(2-x)+\ln x=\ln(2x-x^2)=\ln[1-(x-1)^2]$ ，

当 $x\in\left(0,1\right)$ 时， $g'\left(x\right)<0$ ， $g\left(x\right)$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 内为减函数， $g\left(x\right)>g\left(1\right)=0$ ，

从而 $f\left(2-x\right)>f\left(x\right)$ ，所以 $f(2-\frac{1}{a})>f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$ ，

由（1）得 $2-\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 即 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. ①

令 $h\left(x\right)=x+f\left(x\right)$ ，则 $h'\left(x\right)=1+f'\left(x\right)=1-\ln x$ ，

当 $x\in\left(1,e\right)$ 时， $h'\left(x\right)>0$ ， $h\left(x\right)$ 在区间 $\left(1,e\right)$ 内为增函数， $h\left(x\right)<h\left(e\right)=e$ ，

从而 $x+f\left(x\right)<e$ ，所以 $\frac{1}{b}+f(\frac{1}{b})<e$.

又由 $\frac{1}{a}\in(0,1)$ ，可得 $\frac{1}{a}<\frac{1}{a}(1-\ln\frac{1}{a})=f(\frac{1}{a})=f(\frac{1}{b})$ ，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<f(\frac{1}{b})+\frac{1}{b}=e$. ②

由①②得 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

[方法二]【最优解】：$b\ln a-a\ln b=a-b$ 变形为 $\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，所以 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$.

令 $\frac{1}{a}=m,\frac{1}{b}=n$. 则上式变为 $m(1-\ln m)=n(1-\ln n)$，

于是命题转换为证明：$2<m+n<e$.

令 $f(x)=x(1-\ln x)$，则有 $f(m)=f(n)$，不妨设 $m<n$.

由（1）知 $0<m<1,1<n<e$，先证 $m+n>2$.

要证：$m+n>2\Leftrightarrow n>2-m\Leftrightarrow f(n)<f(2-m)\Leftrightarrow f(m)<f(2-m)$

$\Leftrightarrow f(m)-f(2-m)<0$.

令 $g(x)=f(x)-f(2-x),x\in(0,1)$，

则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]\geq-\ln 1=0$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内单调递增，所以 $g(x)<g(1)=0$，即 $m+n>2$.

再证 $m+n<e$.

因为 $m(1-\ln m)=n\cdot(1-\ln n)>m$，所以 $n(1-\ln n)+n<e\Rightarrow m+n<e$.

令 $h(x)=x(1-\ln x)+x,x\in(1,e)$，

所以 $h'(x)=1-\ln x>0$，故 $h(x)$ 在区间 $(1,e)$ 内单调递增.

所以 $h(x)<h(e)=e$. 故 $h(n)<e$，即 $m+n<e$.

综合可知 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

[方法三]：比值代换

证明 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2$ 同证法 2．以下证明 $x_1+x_2<e$.

不妨设 $x_2=tx_1$，则 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，

由 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$ 得 $x_1(1-\ln x_1)=tx_1[1-\ln(tx_1)]$，$\ln x_1=1-\frac{t\ln t}{t-1}$，

要证 $x_1+x_2<e$，只需证 $(1+t)x_1<e$，两边取对数得 $\ln(1+t)+\ln x_1<1$，

即 $\ln(1+t)+1-\frac{t\ln t}{t-1}<1$，

即证 $\frac{\ln(1+t)}{t}<\frac{\ln t}{t-1}$.

记 $g(s)=\frac{\ln(1+s)}{s}, s\in(0,+\infty)$，则 $g^{'}(s)=\frac{\frac{s}{1+s}-\ln(1+s)}{s^2}$.

记 $h(s)=\frac{s}{1+s}-\ln(1+s)$，则 $h'(s)=\frac{1}{(1+s)^2}-\frac{1}{1+s}<0$，

所以，$h(s)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减. $h(s)<h(0)=0$，则 $g'(s)<0$，

所以 $g(s)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调递减.

由 $t\in(1,+\infty)$ 得 $t-1\in(0,+\infty)$，所以 $g(t)<g(t-1)$，

即 $\frac{\ln(1+t)}{t}<\frac{\ln t}{t-1}$.

[方法四]：构造函数法

由已知得 $\frac{\ln a}{a}-\frac{\ln b}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a}$，令 $\frac{1}{a}=x_1,\frac{1}{b}=x_2$，

不妨设 $x_1<x_2$，所以 $f(x_1)=f(x_2)$.

由（Ⅰ）知，$0<x_1<1<x_2<e$，只需证 $2<x_1+x_2<e$.

证明 $x_1+x_2>2$ 同证法 2.

再证明 $x_1+x_2<e$. 令 $h(x)=\frac{1-\ln x}{x-e}(0<x<e), h^{'}(x)=\frac{-2+\frac{e}{x}+\ln x}{(x-e)^2}$.

令 $\varphi(x)=\ln x+\frac{e}{x}-2(0<x<e)$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{e}{x^2}=\frac{x-e}{x^2}<0$.

所以 $\varphi(x)>\varphi(e)=0, h'(x)>0$，$h(x)$ 在区间 $(0,e)$ 内单调递增.

因为 $0<x_1<x_2<e$，所以 $\frac{1-\ln x_1}{x_1-e}<\frac{1-\ln x_2}{x_2-e}$，即 $\frac{1-\ln x_1}{1-\ln x_2}>\frac{x_1-e}{x_2-e}$

又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，所以 $\frac{1-\ln x_1}{1-\ln x_2}=\frac{x_2}{x_1},\frac{x_2}{x_1}>\frac{x_1-e}{x_2-e}$，

即 $x_2^2-ex_2<x_1^2-ex_1,(x_1-x_2)(x_1+x_2-e)>0$.

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1+x_2<e$，即 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$.

综上，有 $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<e$ 结论得证.

【整体点评】(2)方法一：等价转化是处理导数问题的常见方法，其中利用的对称差函数，构造函数的思想，

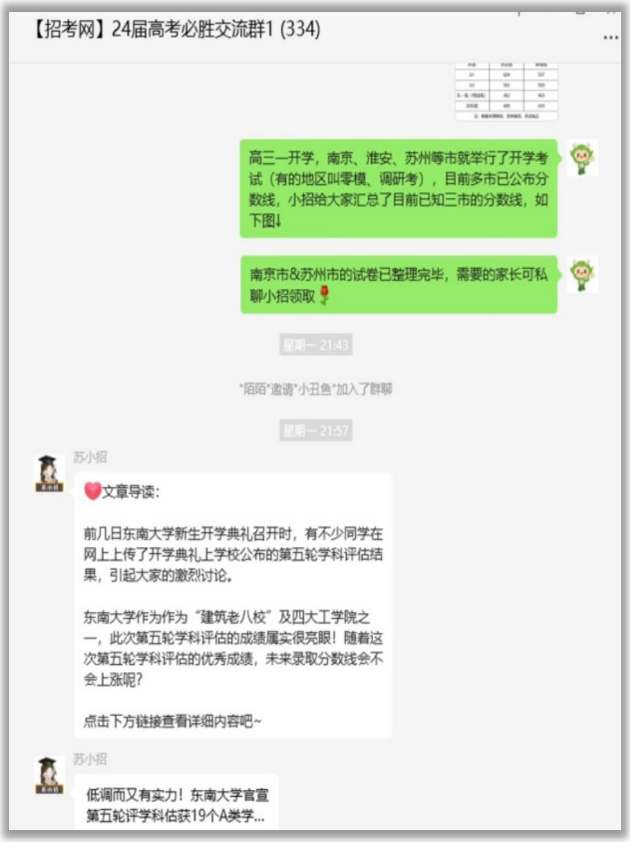
这些都是导数问题必备的知识和技能.

方法二：等价转化是常见的数学思想，构造对称差函数是最基本的极值点偏移问题的处理策略.

方法三：比值代换是一种将双变量问题化为单变量问题的有效途径，然后构造函数利用函数的单调性证明题中的不等式即可.

方法四：构造函数之后想办法出现关于 $x_1+x_2-e<0$ 的式子，这是本方法证明不等式的关键思想所在.

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，欢迎加入江苏招生考试网建立的【江苏高考交流群】，群内会分享一手高考资讯、往年真题、学习资料、综评、强基、志愿填报等干货及答疑，群内还有不定时福利发放哦，快加入吧！



（招考网 qq 群资料）　　　　（招考网微信群分享）

↓↓扫描下方二维码，添加苏小招微信，邀请您加入高考交流群，助力孩子高考！

另外，江苏招生考试网联合志愿通策划了多册升学资料，均可免费分享给需要的家长，欢迎咨询获取。